中　山　大　学

二00四年港澳台人士攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：710

科目名称：数学分析与高等代数

考试时间：4 月 24 日 下午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！答题要写清题号，不必抄题。

数学分析试题

1.（16 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} t(e^t-1)dt}{x^4\sin^2 x}$；

2.（16 分）设 $F(x,y)=f[x+g(y)]$,其中 $f(u)$ 与 $g(y)$ 都是 2 阶可微函数。求 $F(x,y)$ 的所有一阶偏导数与二阶偏导数；

3.（16 分）计算 $\oint_l \dfrac{yx^2-\frac{1}{2}y^2}{\sqrt{1+x^3}}dx+\dfrac{2}{3}\sqrt{1+x^3}\,dy$，其中 l 为三条直线 $x=1, y=0, y=x$ 所围区域的正向边界；

4.（16 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域，并求和函数；

5.（16 分）设函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 连续，试证：$f(x)$ 在 (a,b) 一致连续的充要条件是 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在且为有限值。
又问：对无穷区间（即 a 为 $-\infty$，b 为 $+\infty$）的情形是否有类似的结论？

考试完毕，试题和草稿纸随答题纸一起交回。

高等代数试题

1.(10 分)　求矩阵 X 满足：$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$.

2.(15 分)　讨论 a，b 取什么值时下列方程组有解，并求解.

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4\\x_1+bx_2+x_3=3\\x_1+2bx_2+x_3=4\end{cases}$$

3.(15 分)　设 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$，$g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$，
求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 (f,g)，并求 $u(x)$，$v(x)$ 使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f,g),$$

且 $u(x)$，$v(x)$ 的次数分别小于 $g(x)$，$f(x)$ 的次数.

4.(15 分)　设 V 是数域 F 上的一个线性空间，$f:V\to V$ 是 V 的一个线性变换，
证明：$f^2=f$ 当且仅当 $V=\mathrm{Im}(id-f)\oplus\mathrm{Im}\,f$，
其中 id 是 V 的恒等变换，$\mathrm{Im}\,f=\{f(\alpha)\mid\alpha\in V\}$.

5.(15 分)　设　$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

(1). 求 A 的特征值和特征向量.

(2). 求正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.