# 中　山　大　学

## 二00七 年港澳台人士攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：201

科目名称：高等数学(A)

考试时间：4　月　21　日　下　午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答。答题要写清题号，不必抄题。

本卷共九大题，满分为 150 分。

一，完成下列各题：（每小题 6 分，共 24 分。）

1，求极限　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$。

2，设函数　$y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$，求　$\dfrac{dy}{dx}$。

3，求不定积分　$\int\dfrac{dx}{x(1+x^2)}$。

4，求定积分　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^3 x\,dx$。

二，完成下列各题：（每小题 8 分，共 32 分。）

1，若　$f(x)=\dfrac{\phi(x)\sin x}{x(1-e^x)}$，其中　$\phi(x)$在　$x=0$　可导，且　$\phi(0)=0$，$\phi'(0)=-2$，求　$\mathop{Lim}\limits_{x\to 0}f(x)$。

2，若矩阵　$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，求　$A^{-1}$。

考试完毕，试题和草稿纸随答题纸一起交回。

3，设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

4，求一阶常微分方程 $xy'+2y=4x^2$ 的通解。

三，（本题 12 分）

若函数 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数，且在$(-\infty, +\infty)$连续，求证：方程 $f(x)-f(x-l)=0$ 在任何长度为 $l$ 的闭区间上至少有一个根。

四，（本题 12 分）

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n3^n}(x-3)^n$ 的收敛半径，收敛区间和收敛域。

（2）求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 在点 $x=1$ 处的幂级数展开式。

五，（本题 14 分）

研究常微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$，

（1）求证：若 $1+P(x)+Q(x)=0$，则 $y=e^x$ 是如上方程的解；若 $P(x)+xQ(x)=0$，则 $y=x$ 也是如上方程的解。

（2）求解常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} (x-1)y''-xy'+y=0 \\ y(0)=0, \quad y'(0)=1 \end{cases}$$

六，（本题 14 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，在开区间 $(a,\ b)$ 上可导，$f(b)=1$，又有 $(a,b)$ 中两点 $x_1<x_2$，满足 $f(a)+f(x_1)+f(x_2)=3$ 。

求证：在区间$(a,\ b)$中存在一点 $c$，满足 $f'(c)=0$ 。

七，（本题 14 分）

计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{s} y\,dydz+x\,dzdx+z^2\,dxdy$ ，其中 $s$ 是曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=2$ 所围区域表面的外侧。

八，（本题 14 分）

研究线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+4x_2-(\lambda+2)x_3=3 \\ -6x_2+2(1+\lambda)x_3=-3 \end{cases}$$

（1）问$\lambda$取何值时，方程组有唯一解；

（2）求方程组的唯一解。

九，（本题 14 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ ，

（1）求矩阵 $A$ 的全部特征根；

（2）求矩阵 $B=A^3-A^2-4E$ 的全部特征根，其中$E$为三阶单位矩阵；

（3）求证：矩阵$B$的行列式 $|B|=0$ 。